TITLE:

ランク1の対称空間上のディリクレ問題 (対称空間上の不変微分方程式)

AUTHOR(S):

峰村, 勝弘; 田中, 誠; 岡本, 清郷

CITATION:
峰村, 勝弘 ...[et al]. ランク1の対称空間上のディリクレ問題 (対称空間上の不変微分方程式). 数理解析研究所講究録 1975, 249: 27-30

ISSUE DATE:
1975-08

URL:
http://hdl.handle.net/2433/105693

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
249巻 1975年 27-30

ランク1の対称空間上のディリクレ問題

日本女子大　峰村 勝弘
広島大 理　田中 誠
広島大 理　岡本 清郷

§1 序

1971年に、S. Helgasonは、単位円内部

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

におけるポアンカレ計量

$$ds^2 = (1-|z|^2)^{-2} dz\, d\bar{z}$$

に対応するラプラシアン

$$\Delta = (1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

のX上の固有函数について考察し、次の結果を得た。

定理（I）$B = \{b = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$とし、$s \in \mathbb{C}$とする。B上の超函数$\varphi$の、ポアソン核

$$P(z, b) = \left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\right)^{\frac{1+s}{2}}$$

によるB上での積分

$$\int_B P(z, b)\varphi(b)\, db$$

は、sが$\mathbb{C}$を、φがB上の超函数を動くとき、ΔのX上での

固有函数を尽くす。

§2. Helgason予想.

§1におけるXは. 対称空間の一つである。Helgasonは. Nice Congressで定理(I)の一般化を問題として提出した。

Gを. 連結実半単純線型リー群とし, $G = KAN$を. Gの一つの岩沢分解とする。K, A, Nのリー環をそれぞれ$\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$と書く。$G$の元$g$の上の分解による$A$-成分の$\log$を$H(g)$と書く。$\rho = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}|\mathfrak{n})$とおく。$\mathbb{D}(X)$で$X = G/K$上の$G$-不変な微分作用素のなす可換環を表わす。$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$に対して

$$P_\lambda(x, b) = \exp\{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)\}$$

とおく。(但し $x = gK$, $b = kM$) P_λはポアソン核を与える。$B = K/M$ ($M = Z_K(A)$)上の超函数の全体を$\mathcal{B}(B)$と書く。

予想(II) X上の$\mathbb{D}(X)$の同時固有函数は

$$\int_B P_\lambda(x, b)\varphi(b)\,db \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}_c^*,\ \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

§3. ランク1の対称空間における最近までの結果

(II)に対して. 群論的な方法による研究は. ランク1の場合に限られて来た。この§では$\operatorname{rank}(X) = 1$と仮定し. 群論的な方法で得られた結果を述べる。

$\dim \mathfrak{a}_c^* = 1$であるから, $\mathbb{C} \ni s \longmapsto s\rho \in \mathfrak{a}_c^*$により$\mathfrak{a}_c^*$と$\mathbb{C}$とを同一視する。$\Delta$をKilling形式に対応する$X$上のラプラシ

アンとすると，$\mathbb{D}(X) \cong \mathbb{C}[\Delta]$（すなわち$\Delta$は$\mathbb{D}(X)$の生成元）となるから，以下$\Delta$のみ考えれば十分である。このとき(II)は次の(II₁)と(II₁)の弱い形の(II₂)に分けることが出来る。

(II₁) Δの任意の固有函数は

$$\int_B P_s(x,b)\varphi(b)\,db \quad (s \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

(II₂) Δの，固有値$\mu \geq -\langle\rho,\rho\rangle$の固有函数は

$$\int_B P_s(x,b)\varphi(b)\,db \quad (s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

ランク1の既約対称空間は

BD-I	$SO(n,1)/SO(n)$
A-III	$SU(n,1)/S(U_n \times U_1)$
C-II	$Sp(n,1)/Sp(n) \times Sp(1)$
F-II	

に分類されるが，橋爪，岡本，峰村，Helgason等により次の結果が得られている。

BD-I	(II₁)が成立
A-III, C-II, F-II	(II₂)が成立．

§4．ランク1の対称空間における現在の結果

群論的な方法では限界があり，BD-Iを除いては，弱い形の結果しか得られていない。しかし擬微分作用素の理論を用い

ることにより，generic な固有値に対しては (II) が一般のランク1の対称空間に対して成立することが示される。以下その概略を述べる。

Δ は境界 B に関して確定特異点型であるので，昨日の大島の話にある 大島の定理 により，固有値 $\lambda=(s^2-1)\langle\rho,\rho\rangle$ の固有函数 f は

$$f=A_1(b,D_t,D_b)\,\varphi_1(b)\,t^{\lambda_1}+A_2(b,D_t,D_b)\,\varphi_2(b)\,t^{\lambda_2}$$

と表わされる。(ここに，φ_1,φ_2 は B 上の超函数，A_1,A_2 は擬微分作用素，$\lambda_1=(\frac{p}{2}+q)(1+s)$，$\lambda_2=(\frac{p}{2}+q)(1-s)$，$p=\#\{\text{positive reduced root}\}$，$q=\#\{\text{positive non-reduced root}\}$)

A_1,A_2 のある正規化の下に φ_1,φ_2 は unique である。φ_1,φ_2 を f の第一，第二境界値と呼び $\gamma_s(f)=\varphi_2$，$P_s(\varphi)=\int_B P_s(x,b)\varphi(b)\,db$ と定義すると，γ_s について

(1) $\gamma_s\circ P_s=c(s)\circ\mathrm{id}$ ($c(s)$ は constant)

(2) γ_s は G-equivariant

(3) γ_s は K 上の積分と可換

が成り立つ。(1)〜(3) より (II) が証明される。

§5. ランク2以上の対称空間

最近 大島によって $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ の場合にも (II) が成立することが示された。方法は，余次元1の場合に帰着するのである。